

Лекция 2

Тема. Числовая последовательность, её предел.

План лекции:

- 1) Определение числовой последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.
- 2) Предел последовательности.
- 3) Свойства сходящихся последовательностей.
- 4) Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.
- 5) Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Число e .

§1. Определение числовой последовательности.

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие в силу некоторого вполне определенного закона число x_n , то говорят, что определена **числовая последовательность** (или просто последовательность) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Кратко ее обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n) . Число x_n называется **членом** (элементом) последовательности, а n – номером элемента. Последовательность есть числовая функция натурального аргумента: $x_n = f(n)$, $n \in N$.

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in N$, такой что $\forall n \geq n_{\varepsilon}$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in N$, такой что $\forall n \geq n_{\varepsilon}$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Пример 1. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Надо найти номер n_{ε} , начиная с которого выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow |(-1)^n n| > \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon$. Следовательно, $n_{\varepsilon} = [\varepsilon] + 1$.

$[t]$ – целая часть числа t (антье) (например, $[5,3]=5$, $[-2,6]=-2$)

Пример 2. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n!}$ является бесконечно малой.

Решение. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Надо найти номер n_{ε} , начиная с которого выполняется

неравенство $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n!} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n!} < \varepsilon$. А так как: $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$,

то искомый номер найдём из неравенства $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n-1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$n_{\varepsilon} = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

§2. Предел последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n_{ε} (зависящее от ε), что для всех членов последовательности с номерами $n \geq n_{\varepsilon}$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

При этом пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, а последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют сходящейся к числу a . Данное определение символически можно записать в виде:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \Leftrightarrow x_n$ принадлежит ε -окрестности точки a . С геометрической точки зрения это означает, что в любой ε -окрестности точки a находятся все члены последовательности, начиная с некоторого номера (зависящего, вообще говоря, от ε) или, что то же самое, вне любой ε -окрестности точки a находится лишь конечное число членов последовательности.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символическая запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n_ε (зависящее от ε), что для всех членов последовательности с номерами $n \geq n_\varepsilon$ справедливо неравенство: $|x_n| > \varepsilon$.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $y_1, = 0,3, y_2, = 0,33, y_3, = 0,333, \dots$

Очевидно, что y_n неограниченно приближается к $\frac{1}{3}$ (десятичные дроби дают все точные выражения дроби $\frac{1}{3}$). Стало быть, $\frac{1}{3}$ есть предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{3}$. Разность $y_n - \frac{1}{3}$ последовательно равна $y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}, y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}, y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}$ т.е. $y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3 \cdot 10^n}$. Неограниченность приближения y_n к $\frac{1}{3}$ выражается в том, что абсолютная величина разности, начиная с некоторого номера n_ε , остается меньше любого (заранее заданного) числа ε . Так, если задать $\varepsilon = 0,01$, то $n_\varepsilon = 2$; т.е. начиная со второго номера, абсолютная величина $|y_n - \frac{1}{3}|$ остается меньше 0,01. Если задать $\varepsilon = 0,005 (= \frac{1}{200})$, то по-прежнему $n_\varepsilon = 2$. Если $\varepsilon = 0,001$, то $n_\varepsilon = 3$; $\varepsilon = 0,00001$, то $n_\varepsilon = 5$ и т.д.

Пример 4. Пусть $x_n = \frac{n}{n+1}, (n = 1, 2, \dots)$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Решение. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Надо найти номер n_ε , начиная с которого выполняется

$$\begin{aligned} \text{неравенство } |x_n - 1| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 &\Rightarrow n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

§3. Свойства сходящихся последовательностей.

Свойства:

1. Предел последовательности единствен.

Свойство “зажатой” последовательности:

2. Если $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow a, x_n \leq z_n \leq y_n (n \in \mathbb{N})$, то $z_n \rightarrow a$.

3. Если $x_n \rightarrow a$, то $|x_n| \rightarrow |a|$.

4. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} (|x_n| \leq M)$.

5. Если $x_n \rightarrow 0$, а последовательность (y_n) ограничена, то $x_n y_n \rightarrow 0$.

• Следует из оценки $0 \leq |x_n y_n| \leq M |x_n|$ и свойств 2, 3. ▸

6. Сходящаяся последовательность ограничена.

7. Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, то

(а) $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$,

(б) $x_n y_n \rightarrow ab$,

(в) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ($y_n \neq 0, b \neq 0$).

8. если $x_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

9. Изменение конечного числа членов последовательности не влияет на её сходимость.

§4. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Для бесконечно малых последовательностей справедливо:

1°. Если $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то их сумма или разность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ также последовательность бесконечно малая.

2°. Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то их произведение $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ — последовательность бесконечно малая.

3°. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Для бесконечно больших последовательностей справедливо:

1°. Бесконечно большая последовательность всегда неограничена. Однако не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

2°. Последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

§5. Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Число e .

Числовую последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей* (неубывающей), если каждый последующий член последовательности больше (не меньше) предыдущего, т. е. $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geq x_n$).

Числовую последовательность $\{x_n\}$ называют *убывающей* (невозрастающей), если каждый последующий член последовательности меньше (не больше) предыдущего, т. е. $x_{n+1} < x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Определенные выше последовательности называют *монотонными*.

Теорема. *Монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет предел.*
 Иными словами:

Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Последовательность $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет конечный предел, называемый числом e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots$$

Пример 5. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Решение. Так как $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$, то сравним отношение каждого последующего члена последовательности к предыдущему с 1:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow$ эта последовательность является возрастающей. Следовательно, её первый член $x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ограничивает эту последовательность снизу. Докажем, что данная последовательность ограничена и сверху.

$$\blacktriangleright \ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Выше мы воспользовались неравенством $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Получили: $\ln x_n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_n < e \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\blacktriangleleft$

Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{3}{2} = x_1 \leq x_n < e$. Следовательно, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$.

Пример 6. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \dots \frac{n+9}{2n-1}$.

Решение:

$$1) \text{ Монотонность: } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \dots \frac{n+9}{2n-1} \cdot \frac{n+10}{2n+1}}{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \dots \frac{n+9}{2n-1}} = \frac{n+10}{2n+1} < 1, \quad \text{если } n+10 < 2n+1, \Rightarrow$$

$n > 9$. Следовательно, начиная с $n > 9$: $x_{n+1} < x_n$,

2) Ограниченность: $0 < x_n < \max\{x_1, x_{10}\}$

Следовательно по теореме последовательность сходится.